数理解析研究所講究録
929巻 1995年 135-154

E(k,n) の q-analogue について

神戸大自然科学 中谷　実伸 (Minobu NAKATANI)

0. はじめに

超幾何関数の重要な性質の１つに、Lie 環との対称性が挙げられる。すなわち $k\times n$ 型グラスマン多様体に対応する超幾何関数は（これらはある微分方程式系の解として実現されるのだが）、その隣接関係式（Contiguity Relation）によって、Lie 環 $gl(n)$ との対称性を持つ、というものである。

それに対し、q- 超幾何関数と量子群との対称性については、2×4 型、$2\times n$ 型、3×6 型のそれぞれの場合について、[1]、[2]、[3] で示されている。特に、[2]、[3] においては、q- 超幾何関数を、量子群の表現を用いた、ある q- 差分方程式系の解として実現している。

ここではより一般的に 量子群 $U_q(gl(n))$ との対称性を持つ、$k\times n$ 型 q- 超幾何関数 $\varphi_{k,n}$ の実現について述べる。

まず１章で、古典的な場合（q-analogue に対してこう呼ばれる）について述べる。

２章では、量子群 $U_q(gl(n))$ と、その表現の対象となる非可換な代数について定義する。

３章では、２章で定義された、非可換な代数への表現から、可換な多項式環への量子群の表現を定義し、その表現を用いた q-差分方程式系の解として q- 超幾何関数 $\varphi_{k,n}$ を実現する。

最後に４章において、q- 超幾何関数 $\varphi_{k,n}$ の Contiguity relation について述べる。

また、全章を通じて $0 < |q| < 1$、$1 \leq k < n$ とする。

1. Classical Case

ここでは、古典的な場合に $k \times n$ 型超幾何関数がどのように実現され、Lie 環との対称性がどのように導かれるのか、ということについて簡単に説明する。

$T = (t_{rj})_{1 \leq r \leq k, 1 \leq j \leq n}$ を $k \times n$ 行列空間 $M(k,n)$ の元とする。ここで、n 個の複素数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ に対し、次のような、微分方程式系を考える。

$$\Phi(gT) = \det(g)^{-1}\Phi(T) \quad (g \in GL(k)) \tag{1.1}$$

$$\Phi(T\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)) = \Phi(T){c_1}^{\lambda_1} \cdots {c_n}^{\lambda_n} \tag{1.2}$$

$$\Delta_{i,j}^{r,s}\Phi(T) = 0 \tag{1.3}$$

ただし、

$$\Delta_{i,j}^{r,s} = \frac{\partial^2}{\partial t_{ri}\partial t_{sj}} - \frac{\partial^2}{\partial t_{si}\partial t_{rj}}$$

(1.1)、(1.2) より、$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -k$ となる。(定数行列を右から掛けても、左から掛けても結果は同じである。)

上の微分方程式系を $k \times n$ 型超幾何微分方程式系 E(k,n) と呼び、その解を $k \times n$ 型超幾何関数と呼ぶ。

さて、$\{\xi_{j_1 \cdots j_k}\}_{1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n}$ を次で定義する。

$$\xi_{j_1 \ldots j_k} = \sum_{\omega \in S_k} (-1)^{l(\omega)} t_{\omega(1)j_1} t_{\omega(2)j_2} \ldots t_{\omega(k)j_k} \tag{1.4}$$

ただし、S_k は k 次の対称群、$l(\omega)$ は $\omega \in S_k$ の転倒数である。（これはつまり、k 次の minor のことである。）

この $\{\xi_{j_1\cdots j_k}\}$ は、グラスマン多様体の Plücker coordinates といい、Plücker relation と呼ばれる次のような関係式を満たすことが知られている。

Proposition 1.1. $1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, 1 \leq j_0 \leq \cdots \leq j_k \leq n$ に対して、

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \xi_{i_1 \cdots i_{k-1} j_m} \xi_{j_0 \cdots \hat{j_m} \cdots j_k} = 0 \tag{1.5}$$

さて、この Plücker coordinates を用いて、行列 T が次のように分解できる事に注意する。

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2k} \\ & \ldots & \ldots & \\ t_{k1} & t_{k2} & \ldots & t_{kk} \end{pmatrix} \times T' \tag{1.6}$$

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & & & & x_{k+1}^1 & \ldots & x_n^1 \\ & 1 & & & x_{k+1}^2 & \ldots & x_n^2 \\ & & \ddots & & & \ldots & \\ & & & 1 & x_{k+1}^k & \ldots & x_n^k \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

ここで、$x_j^r = (-1)^{r-1}(\xi_{1\cdots k})^{-1}\xi_{\hat{r}j}$、また $\xi_{\hat{r}j} = \xi_{1\cdots\hat{r}\cdots kj}$ である。(1.1) から、$\Phi(T)$ は $k \times (n-k)$ 変数 $x = (x_j^r)$ についての関数 $G(x)$ を用いて

$$\Phi(T) = (\xi_{1\cdots k})^{-1} G(x) \tag{1.8}$$

と書くことができる。

さらに (1.1)、(1.2) に注意すると、$x=(x_j^r)$ について、次のような 2 種類の斉次性が存在することがわかる。

$$\sum_{j=k+1}^{n} x_j^r \frac{\partial}{\partial x_j^r} G(x) = (-\lambda_r - 1)G(x) \quad \text{for } 1 \le r \le k \tag{1.9}$$

$$\sum_{r=1}^{k} x_j^r \frac{\partial}{\partial x_j^r} G(x) = \lambda_j G(x) \quad \text{for } k \le j \le n \tag{1.10}$$

以上の事から、$z_j^r = \dfrac{x_j^r x_{k+1}^1}{x_{k+1}^r x_j^1}$ $(r=2,\ldots,k\,;\, j=k+2,\ldots,n)$ とおくと、$(k-1)\times(n-k-1)$ 変数 $z=(z_j^r)$ について、

$$\begin{aligned} G(x) = F(z) & \\ & \times {x_{k+1}^1}^{\gamma-1} \prod_{r=2}^{k} {x_{k+1}^r}^{-\lambda_r-1} \prod_{j=k+2}^{n} {x_j^1}^{\lambda_j} \end{aligned} \tag{1.11}$$

と書くことができる。ただし、$\gamma = \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_{k+1} + k$ とする。

さて、関数 $G_\lambda(x)$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} G_\lambda(x) =& F_{k,n}(z;\lambda) \\ & \times {x_{k+1}^1}^{\gamma-1} \prod_{r=2}^{k} {x_{k+1}^r}^{-\lambda_r-1} \prod_{j=k+2}^{n} {x_j^1}^{\lambda_j} \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$F_{k,n}(z;\lambda) = \sum_{a_j^r \ge 0} \frac{\prod_{j=k+2}^{n} (-\lambda_j)_{|A_j|} \prod_{r=2}^{k} (\lambda_r+1)_{|A^r|}}{(\gamma)_{|A|} \prod_{r,j} (1)_{a_j^r}} z^A \tag{1.13}$$

ただし、$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ であり、行列 $A = (a_j^r)_{2\le r\le k, k+2\le j\le n}$, に対し、

$$|A_j| = a_j^2 + a_j^3 + \cdots + a_j^k, \quad |A^r| = a_{k+2}^r + a_{k+3}^r + \cdots + a_n^r,$$

$$|A| = \sum_{r,j} a_j^r, \quad z^A = \prod_{r,j} z_j^{r\,a_j^r}$$

とする。このとき、$(\xi_{1\cdots k})^{-1}G_\lambda(x)$ は、微分方程式 (1.3) の原点における解である。

Remark 1.2. (1.13) において、$(k,n) = (2,n)$ のとき、$F_{2,n}$ は（$n-3$ 変数の） Lauricella の F_D と呼ばれる超幾何関数である。特に、$F_{2,4}$ は、Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ として知られている。

ここで、

$$E_{i,j} = \sum_{r=1}^{k} t_{ri}\frac{\partial}{\partial t_{rj}} \tag{1.14}$$

とおくと、$\{E_{i,j}\}_{1\le i,j\le n}$ によって生成される Lie 環は、Lie 環 $gl(n)$ と同型である。$k\times n$ 型超幾何関数 $F_{k,n}(z;\lambda)$ に対して、${}^{\exists}\nu(\lambda;i,j)\in\mathbf{C}$ があり

$$E_{i,j}F_{k,n}(z;\lambda) = \nu(\lambda;i,j)F_{k,n}(z;\lambda_j^i) \tag{1.15}$$

が成り立つ。ただし、$\lambda_j^i = (\lambda_1,\ldots,\lambda_i+1,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_n)$ とする。

すなわち、超幾何関数 $F_{k,n}$ の隣接関係式は、包絡環 $U(gl(n))$ の表現を与えている。この意味で、超幾何関数 $F_{k,n}$ は Lie 環 $gl(n)$ との対称性を持つという。

さらに $\{E_{i,j}\}$ は微分作用素として、多項式環 $\mathbf{C}[t_{11},\ldots,t_{kn}]$ に $U(gl(n))$-module の構造を定義する。この U_q の表現を用いて、先の $G_\lambda(x)$ を解とするような微分方程式系を与えよう。

まず (1.9) – (1.10) における変数 $x=(x_j^r)$ についての 2 種類の斉次性は $\{E_{i,j}\}$ を用いて次のように表される。

$$
\begin{aligned}
&E_{r,r}\cdot G(x)=(-\lambda_r-1)G(x)\quad(1\le r\le k)\\
&E_{j,j}\cdot G(x)=\lambda_j G(x)\quad(k+1\le j\le n)
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

ここで $U(gl(n))$ の元 C_{ij} を

$$
C_{ij}=(E_{i,i}+1)E_{j,j}-E_{j,i}E_{i,j}
\tag{1.17}
$$

で定義すると、

$$
C_{ij}=\sum_{1\le r<s\le k}(t_{ri}t_{sj}-t_{si}t_{rj})\Delta_{i,j}^{r,s}
\tag{1.18}
$$

となる。このことから $G_\lambda(x)$ は微分方程式系

$$
\begin{aligned}
&E_{r,r}\cdot G(x)=(-\lambda_r-1)G(x)\quad(1\le r\le k)\\
&E_{j,j}\cdot G(x)=\lambda_j G(x)\quad(k+1\le j\le n)
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

および

$$
C_{ij}\cdot\{(\xi_{1\cdots k})^{-1}G(x)\}=0
\tag{1.20}
$$

の解である。

つまり、$k\times n$ 型超幾何関数 $F_{k,n}$ が、包絡環 $U(gl(n))$ の表現を用いた微分方程式系の解として実現された。そこで、本文では $F_{k,n}$ の q-analogue である $k\times n$ 型 q- 超幾何関数 $\varphi_{k,n}$ が量子群 $U_q(gl(n))$ の表現を用いた q- 差分方程式系の解として実現され、隣接関係式により量子群との対称性を持つことを示す。

2. 量子群の表現と Quantum Grassmannian

量子群の、可換な多項式環への表現を与えるために、ここでは $U_q(gl(n))$-module の構造を持つ非可換な代数を定義する。

まず量子群 $U_q(gl(n))$ （以下 U_q ）の定義について簡単に述べる。量子群 U_q は包絡環 $U(gl(n))$ の q-analogue で、e_j、f_j $(1\le j\le n-1)$、$q^{\pm\epsilon_j}$ $(1\le j\le n)$ で生成される非可換な代数である。生成元同士の可換律は、$h=a_1\epsilon_1+\cdots+a_n\epsilon_n$ $(a_j\in\mathbf{Z})$ に対して $q^h=q^{a_1\epsilon_1}\cdots q^{a_n\epsilon_n}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&q^0=1,\quad q^hq^{h'}=q^{h+h'},\\
&q^he_jq^{-h}=q^{\langle h,\epsilon_j-\epsilon_{j+1}\rangle}e_j,\quad q^hf_jq^{-h}=q^{\langle h,-\epsilon_j+\epsilon_{j+1}\rangle}f_j,\\
&e_if_j-f_je_i=\delta_{i,j}\frac{q^{\epsilon_i-\epsilon_{i+1}}-q^{-\epsilon_i+\epsilon_{i+1}}}{q-q^{-1}},\\
&e_ie_j=e_je_i,\quad f_if_j=f_jf_i\quad(|i-j|\ge 2),\\
&{e_i}^2e_j-(q+q^{-1})e_ie_je_i+e_j{e_i}^2=0\quad(|i-j|=1),\\
&{f_i}^2f_j-(q+q^{-1})f_if_jf_i+f_j{f_i}^2=0\quad(|i-j|=1),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ただし、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は対称双一次形式で、$\langle\epsilon_i,\epsilon_j\rangle=\delta_{ij}$ とする。

Classical case において、 Lie 環 $gl(n)$ の一般の元 $E_{i,j}$ は、$[\cdot,\cdot]$ を Lie bracket とすれば

$$E_{i,j} = [E_{i,h}, E_{h,j}] \quad (i \lessgtr^{\forall} h \lessgtr j)$$

により inductive に定義されるが、量子群 U_q の元 $\hat{E}_{i,j}$ $(i \neq j)$ は次のように inductive に定義される。

$$\begin{aligned} &\hat{E}_{j,j+1} = e_j, \qquad \hat{E}_{j+1,j} = f_j, \\ &\hat{E}_{i,j} = \hat{E}_{i,k}\hat{E}_{k,j} - q^{\pm 1}\hat{E}_{k,j}\hat{E}_{i,k} \qquad (i \lessgtr^{\forall} k \lessgtr j) \end{aligned} \tag{2.2}$$

また U_q は、生成元に対する coproduct Δ、counit ε、antipode S を次のように定義することにより、Hopf algebra の構造を持つ。

$$\begin{aligned} \Delta(q^h) &= q^h \otimes q^h, \\ \Delta(e_j) &= e_j \otimes 1 + q^{\epsilon_j - \epsilon_{j+1}} \otimes e_j, \\ \Delta(f_j) &= f_j \otimes q^{-\epsilon_j + \epsilon_{j+1}} + 1 \otimes f_j, \\ &\varepsilon(q^h) = 1, \quad \varepsilon(e_j) = \varepsilon(f_j) = 0, \\ &S(q^h) = q^{-h}, \quad S(e_j) = -q^{-\epsilon_j + \epsilon_{j+1}} e_j, \quad S(f_j) = -f_j q^{\epsilon_j - \epsilon_{j+1}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Classical Case において、包絡環の action (1.14) は行列空間 $M(k,n)$ の座標環 $A(M(k,n))$ に $U(gl(n))$-module の構造を与えた。ここでは U_q-module の構造を持つ非可換な代数 $A_q(M(k,n))$ を定義する。

Definition 2.1. $A_q(M(k,n))$ は以下のように定義される algebra である。

生成元: $t_{rj} \quad (1 \le r \le k,\ 1 \le j \le n)$

関係式: $1 \le r < s \le k,\ 1 \le i < j \le n$ のとき

$$t_{ri}t_{rj} = qt_{rj}t_{ri}, \quad t_{ri}t_{si} = qt_{si}t_{ri},$$
$$t_{rj}t_{sj} = qt_{sj}t_{rj}, \quad t_{si}t_{sj} = qt_{sj}t_{si},$$
$$t_{rj}t_{si} = t_{si}t_{rj}, \quad t_{ri}t_{sj} - t_{sj}t_{ri} = (q-q^{-1})t_{rj}t_{si}$$

関係式は一見複雑そうだが、$1 \le r < s \le k,\ 1 \le i < j \le n$ に対し

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ri} & t_{rj} \\ t_{si} & t_{sj} \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\begin{gathered} ab = qba, \quad ac = qca, \quad bd = qdb, \quad cd = qdc, \\ bc = cb, \quad ad - da = (q-q^{-1})bc \end{gathered} \tag{2.4}$$

となることを示している。特に (2.4) のような関係式を $Mat_q(2)$-relation と呼ぶ。

この $A_q(M(k,n))$ の生成元 t_{rj} に対する U_q の生成元の action を以下のように定義することにより、$A_q(M(k,n))$ は U_q-module の構造を持つ。

$$q^h \cdot t_{rj} = q^{<h,\epsilon_j>}t_{rj}, \quad e_k \cdot t_{rj} = \delta_{k+1,j}t_{rk}, \quad f_k \cdot t_{rj} = \delta_{k,j}t_{rk+1} \tag{2.5}$$

ここで $A_q(M(k,n))$ の生成元 t_{rj} を用いて、Plücker coordinates の q-analogue である quantum minor $\{\xi_{j_1\cdots j_k}\}$ を次で定義する。

$$\xi_{j_1\cdots j_k} = \sum_{\omega\in S_k} (-q)^{l(\omega)} t_{\omega(1)j_1} t_{\omega(2)j_2} \cdots t_{\omega(k)j_k} \tag{2.6}$$

(2.4)、(2.6) から次のことがわかる。

Proposition 2.2. $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k$、$\omega \in S_k$ について、

$$\xi_{j_1\cdots j_k} = (-q)^{-l(\omega)} \xi_{j_{\omega(1)}\cdots j_{\omega(k)}}. \tag{2.7}$$

また quantum minor も Classical case の Plücker relation の q-analogue とでもいうべき次の関係式を満たす。

Proposition 2.3. $1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n,\ 1 \leq j_0 \leq \ldots \leq j_k \leq n$ に対して、

$$\sum_{m=0}^{k} (-q)^m \xi_{i_1\cdots i_{k-1} j_m} \xi_{j_0\cdots \hat{j_m} \cdots j_k} = 0 \tag{2.8}$$

$\{\xi_{j_1\cdots j_k}\}$ で生成される $A_q(M(k,n))$ の subalgebra $\mathcal{A}$ は U_q-submodule の構造を持っている。

Classical case での行列の分解 (1.6)−(1.7) において、$(\xi_{1\cdots k})^{-1}$ を導入することにより各変数を Plücker coordinates で書けた。そこで、$\mathcal{A}$ の localization $\mathcal{A}[(\xi_{1\cdots k})^{-1}]$ を考えると、次の定理が成り立つ。

Theorem 2.4. $\mathcal{A}[(\xi_{1\cdots k})^{-1}]$ は ${\xi_{1\cdots k}}^{\pm 1}$、$\xi_{\hat{r}j}(1 \le r \le k, k+1 \le j \le n)$ らで生成される algebra で、以下のような monomial basis を持つ。

$$\xi_{\hat{1}n}^{\nu_n^1}\xi_{\hat{1}n-1}^{\nu_{n-1}^1}\cdots\xi_{\hat{1}k+1}^{\nu_{k+1}^1}\xi_{\hat{2}n}^{\nu_n^2}\xi_{\hat{2}n-1}^{\nu_{n-1}^2}\cdots\xi_{\hat{k}k+1}^{\nu_{k+1}^k}\xi_{1\cdots k}^{\mu} \tag{2.9}$$

ただし、$\nu_j^r \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$、$\mu \in \mathbf{Z}$ 。

以下、非負整数の行列 $\nu = (\nu_j^r)_{1\le r\le k, k+1\le j\le n}$ について、

$$\xi^{\nu} = \xi_{\hat{1}n}^{\nu_n^1}\xi_{\hat{1}n-1}^{\nu_{n-1}^1}\cdots\xi_{\hat{1}k+1}^{\nu_{k+1}^1}\xi_{\hat{2}n}^{\nu_n^2}\xi_{\hat{2}n-1}^{\nu_{n-1}^2}\cdots\xi_{\hat{k}k+1}^{\nu_{k+1}^k} \tag{2.10}$$

と表記する事にする。

これら生成元の間の可換律については、Plücker relation により、$\xi_{1\cdots k}$ と $\xi_{\hat{r}j\,(1\le r\le k,\, k+1\le j\le n)}$ については

$$\xi_{1\cdots k}\xi_{\hat{r}j} = q\xi_{\hat{r}j}\xi_{1\cdots k} \tag{2.11}$$

が成り立ち、$\{\xi_{\hat{r}j}\}$ 間では

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{\hat{s}i} & \xi_{\hat{s}j} \\ \xi_{\hat{r}i} & \xi_{\hat{r}j} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \le r < s \le k \\ 1 \le i < j \le n \end{pmatrix}$$

が、$Mat_q(2)$-relation を満たすことがわかる。

この localization $\mathcal{A}[(\xi_{1\cdots k})^{-1}]$（これはすなわち、Classical case において、(1.1) の条件から $\xi_{1\cdots k}$ で割るという作業を、非可換な algebra の上で行っているのだが）も、U_q-module の構造を持つ。

次章で、この表現を用いて可換な多項式環への U_q の表現を定義する。

3. 多項式環への $\mathbf{U_q}$ の表現と q- 差分方程式系

Classical case において、超幾何関数 $F_{k,n}$ は Lie 環の表現を用いた微分方程式系の解として実現された。この章では可換な多項式環上への U_q の表現を定義し、それを用いた q- 差分方程式系の解として、q- 超幾何関数 $\varphi_{k,n}$ を実現する。

まず (1.8) および変数 x の定義より、$\mathcal{A}[(\xi_{1\cdots k})^{-1}]$ の次のような subspace を考える。

$$\mathcal{M}_{k,n} = \bigoplus_{\nu\in(\mathbf{Z}_{\geq 0})^{k(n-k)}} \mathbf{C}\xi^{\nu}{\xi_{1\cdots k}}^{-|\nu|-1} \tag{3.1}$$

ただし、$|\nu| = \sum_{r,j} \nu_j^r$ とする。この $\mathcal{M}_{k,n}$ は、$\mathcal{A}[(\xi_{1\cdots k})^{-1}]$ の U_q-submodule の構造を持っている。$^{\forall}a \in U_q$ の $\mathcal{M}_{k,n}$ への action を

$$\bar{\rho}(a) : \mathcal{M}_{k,n} \to \mathcal{M}_{k,n} \tag{3.2}$$

で表すことにする。

可換な $k\times(n-k)$ 変数 $x = (x_j^r)_{(1\leq r\leq k, k+1\leq j\leq n)}$ についての多項式環 $\mathbf{C}[x]$ を考える。$k\times(n-k)$ 非負整数行列 $\nu = (\nu_j^r)_{(1\leq r\leq k, k+1\leq j\leq n)}$ に対し、x^ν を次で定義する。

$$x^\nu = \prod_{1\leq r\leq k, k+1\leq j\leq n} {x_j^r}^{\nu_j^r} \tag{3.3}$$

ここで、$\phi : M(k,n-k;\mathbf{Z}_{\geq 0}) \to \mathbf{Z}$ を高々 2 次の任意関数とする。

$$\phi(\nu) = \sum_{r,s,i,j} \alpha_{i,j}^{r,s} \nu_i^r \nu_j^s + \sum_{r,j} \beta_{r,j} \nu_j^r + c \tag{3.4}$$

このような ϕ について、次のようなベクトル空間の同型射 ψ_ϕ : $\mathbf{C}[x] \to \mathcal{M}_{k,n}$ を定義する。

$$\psi_\phi(x^\nu) = \xi^\nu {\xi_{1\cdots k}}^{-|\nu|-1} q^{\phi(\nu)} \tag{3.5}$$

すると、(3.2) で定義された、非可換な algebra $\mathcal{M}_{k,n}$ への U_q の表現 $\bar{\rho}$ を用いて、可換な多項式環 $\mathbf{C}[x]$ 上への U_q の表現 ρ_ϕ が得られる。すなわち、$a \in U_q$ について

$$\rho_\phi(a) = {\psi_\phi}^{-1} \circ \bar{\rho}(a) \circ \psi_\phi \tag{3.6}$$

とすればよい。

このとき、U_q は q- 差分作用素として、$\mathbf{C}[x]$ に作用する。

実際に、例えば

$$q^h \cdot \xi_{j_1 \ldots j_k} = q^{\langle h, \epsilon_{j_1} + \cdots + \epsilon_{j_k} \rangle} \xi_{j_1 \ldots j_k}$$

だから、$k+1 \leq^\forall j \leq n$ について、

$$q^{\epsilon_j} \cdot \xi^\nu (\xi_{1\cdots k})^{-|\nu|-1} = q^{\nu_j^1 + \cdots + \nu_j^k} \xi^\nu (\xi_{1\cdots k})^{-|\nu|-1}$$

となるので、

$$\rho_\phi(q^{\epsilon_j}) = q^{\theta_j^1 + \cdots + \theta_j^k} \tag{3.7}$$

と表される。ただし、$q^{\theta_j^r}$ は q-shift operator、すなわち、

$$q^{\theta_j^r} f(x_{k+1}^1, \ldots, x_n^k) = f(x_{k+1}^1, \ldots, qx_j^r, \ldots, x_n^k) \tag{3.8}$$

なる作用素である。その他の生成元の action についてはここでは省略する。([4] 参照)

ここで U_q の元 $\hat{C}_{ij}$ を次のように定義する。(これはすなわち、(1.17) で定義された C_{ij} の q-analogue である。)

$$(q-q^{-1})^2\hat{C}_{ij} = (q^{1+\epsilon_i} - q^{-1-\epsilon_i})(q^{\epsilon_j} - q^{-\epsilon_j}) - (q-q^{-1})^2\hat{E}_{j,i}\hat{E}_{i,j}, \tag{3.9}$$

実際に、例えば $j \geq k+2$ のとき、

$$\begin{aligned}(q-q^{-1})^2\hat{C}_{jj+1} = &\sum_{2\leq r<s\leq k} A_{r,s}(x, q^\theta) \\ &\times \{\frac{1}{x_{j+1}^r x_j^s}(q^{2\theta_j^s} - 1)(q^{2\theta_{j+1}^r} - 1) \\ &- \frac{1}{x_j^r x_{j+1}^s}(q^{2\theta_j^r} - 1)(q^{2\theta_{j+1}^s} - 1)\} \\ &+ \sum_{s=2}^{k} B_s(x, q^\theta) \\ &\times \{\frac{1}{x_{j+1}^1 x_j^s}(q^{2\theta_j^s} - 1)(1 - q^{-2\theta_{j+1}^1}) \\ &- \frac{1}{x_j^1 x_{j+1}^s}(1 - q^{-2\theta_j^1})(q^{2\theta_{j+1}^s} - 1)\}\end{aligned}$$

$A_{r,s}$、B_s は x、$q^{\theta_j^r}$ $(1 \leq r \leq k; k+1 \leq j \leq n)$ の関数。その他の $\hat{C}_{ij}$ も省略する。

さて、$k \times n$ 型超幾何関数 $F_{k,n}$ が包絡環 U_q の表現から定義された微分方程式系の解として実現されるのに対し、U_q の表現から得られる次のような q- 差分方程式系を定義しよう。

$$\rho_\phi(q^{\epsilon_r})G(x) = q^{-\lambda_r - 1}G(x) \quad (1 \le r \le k) \tag{3.10}$$

$$\rho_\phi(q^{\epsilon_j})G(x) = q^{\lambda_j}G(x) \quad (k+1 \le j \le n) \tag{3.11}$$

$$\rho_\phi(\hat{C}_{ij})G(x) = 0 \quad (1 \le i \ne j \le n) \tag{3.12}$$

ただし、$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ は $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -k$ なる n 個の複素数の列である。(3.10)、(3.11) は変数 $x = (x_j^r)$ についての 2 種類の斉次性を、U_q の元を用いて表したものである。

$(k-1) \times (n-k-1)$ 変数 $z = (z_j^r)_{(2 \le r \le k, k+2 \le j \le n)}$ に対し、$k \times n$ 型 q- 超幾何関数 $\varphi_{k,n}(\lambda; q, z)$ を、次のように定義する。

$$\varphi_{k,n}(\lambda; q, z) = \sum_{a_j^r \ge 0} \frac{\prod_{j=k+2}^{n}(q^{-\lambda_j}; q)_{|A_j|} \prod_{r=2}^{k}(q^{\lambda_r+1}; q)_{|A^r|}}{(q^\gamma; q)_{|A|} \prod_{r,j}(q; q)_{a_j^r}} z^A \tag{3.13}$$

ただし、$(a; q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ とする。

Remark 3.1. $q \to 1$ のとき、$\dfrac{1-q^n}{1-q} \to n$ であることから、$\varphi_{k,n}$ は $F_{k,n}$ に収束する。

このとき、次が成り立つ。

Thorem 3.2. $\phi(\nu)$ を次で定義する。

$$\phi(\nu) = \sum_{1 \le r < s \le k, k+1 \le i < j \le n} \nu_i^r \nu_j^s - \sum_{j=k+2}^{n} (\nu_j^1)^2 - \sum_{r=2}^{k} \nu_{k+1}^r (\nu_{k+1}^r + 2) \tag{3.14}$$

このとき、

$$
\begin{aligned}
G_\lambda(x) &= \varphi_{k,n}(\lambda; q^2, z) \\
&\times {x^1_{k+1}}^{\gamma-1} \prod_{r=2}^{k} {x^r_{k+1}}^{-\lambda_r-1} \prod_{j=k+2}^{n} {x^1_j}^{\lambda_j}
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

は、q- 差分方程式系 (3.10) – (3.12) の原点における解である。ただし、

$$
z^r_j = \frac{x^r_j x^1_{k+1}}{x^1_j x^r_{k+1}}
$$

とする。

先の q- 差分方程式系 (3.10) – (3.12) を $k \times n$ 型 q- 超幾何差分方程式系と呼ぶことにする。

4. Contiguity Relation

最後に、q- 超幾何関数 $\varphi_{k,n}$ についての Contiguity Relation について述べる。この章において、$\varphi_\lambda = \varphi_{k,n}(\lambda; q^2, z)$ と書くことにする。

$a \in U_q$ を weight κ 、すなわち

$$
q^h a q^{-h} = q^{\langle h, \kappa \rangle} a
$$

なる元とする。このとき、operator $\pi_\lambda(a)$ を次で定義する。

$$\rho_\phi(a)G_\lambda(x) = \pi_\lambda(a)\varphi_\lambda \times {x^1_{k+1}}^{\gamma'-1}\prod_{r=2}^{k}{x^r_{k+1}}^{-\lambda'_r-1}\prod_{j=k+2}^{n}{x^1_j}^{\lambda'_j} \tag{4.1}$$

ただし、$\lambda' = (\lambda'_j) = \lambda + \kappa$、$\gamma' = \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_{k+1} + k$ とする。

Proposition 4.1. $\alpha^i_j = \epsilon_i - \epsilon_j$ とする。q- 超幾何関数 φ_λ についての Contiguity relation は以下の通り。

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda(\hat{E}_{1,r})\varphi_\lambda =&(-1)^r q^{\lambda_1-2\lambda_r+\gamma+\tau_{1,r}+1}[\gamma-1]\varphi_{\lambda+\alpha^1_r}\\
&(2\le r\le k),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{r,1})\varphi_\lambda =&(-1)^r q^{-\lambda_1+2\lambda_r-\gamma-\tau_{1,r}+1}\frac{[\lambda_1][\lambda_r+1]}{[\gamma]}\varphi_{\lambda+\alpha^r_1}\\
&(2\le r\le k),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{1,k+1})\varphi_\lambda =&(-1)^{k-1} q^{\tau_{1,k+1}}[\gamma-1]\varphi_{\lambda+\alpha^1_{k+1}},\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{k+1,1})\varphi_\lambda =&(-1)^{k-1} q^{-\tau_{1,k+1}}\frac{[\lambda_1][\lambda_{k+1}+1]}{[\gamma]}\varphi_{\lambda+\alpha^{k+1}_1},\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{1,j})\varphi_\lambda =&(-1)^{k-1} q^{\lambda_{k+1}-\gamma-2\lambda_j+\tau_{1,j}+2}[\lambda_j]\varphi_{\lambda+\alpha^1_j}\\
&(k+2\le j\le n),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{j,1})\varphi_\lambda =&(-1)^{k-1} q^{-\lambda_{k+1}+\gamma+2\lambda_j-\tau_{1,j}}[\lambda_1]\varphi_{\lambda+\alpha^j_1}\\
&(k+2\le j\le n),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{r,s})\varphi_\lambda =&(-1)^{r-s} q^{2\lambda_r-2\lambda_s+\tau_{r,s}+2}[\lambda_r+1]\varphi_{\lambda+\alpha^r_s}\\
&(2\le r< s\le k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda(\hat{E}_{s,r})\varphi_\lambda =&(-1)^{r-s}q^{-2\lambda_r+2\lambda_s-\tau_{r,s}+2}[\lambda_s+1]\varphi_{\lambda+\alpha_r^s}\\
&(2\le r<s\le k),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{r,k+1})\varphi_\lambda =&(-1)^{k+1-r}q^{-\lambda_1-\gamma+2\lambda_r+\tau_{r,k+1}+1}[\lambda_r+1]\varphi_{\lambda+\alpha_{k+1}^r}\\
&(2\le r\le k),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{k+1,r})\varphi_\lambda =&(-1)^{k+1-r}q^{\lambda_1+\gamma-2\lambda_r-\tau_{r,k+1}+1}[\lambda_{k+1}+1]\varphi_{\lambda+\alpha_r^{k+1}}\\
&(2\le r\le k),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{r,j})\varphi_\lambda =&(-1)^{k+1-r}q^{-\lambda_1+2\lambda_r+\lambda_{k+1}-2\lambda_j-2\gamma+\tau_{r,j}+2}\\
&\times\frac{[\lambda_r+1][\lambda_j]}{[\gamma]}\varphi_{\lambda+\alpha_j^r}\\
&(2\le r\le k;k+2\le j\le n),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{j,r})\varphi_\lambda =&(-1)^{k+1-r}q^{\lambda_1-2\lambda_r-\lambda_{k+1}+2\lambda_j+2\gamma-\tau_{r,j}}[\gamma-1]\varphi_{\lambda+\alpha_r^j}\\
&(2\le r\le k;k+2\le j\le n),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{k+1,j})\varphi_\lambda =&q^{\lambda_{k+1}-\gamma-2\lambda_j+\tau_{k+1,j}+2}\frac{[\lambda_{k+1}+1][\lambda_j]}{[\gamma]}\varphi_{\lambda+\alpha_j^{k+1}}\\
&(k+2\le j\le n),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{j,k+1})\varphi_\lambda =&q^{-\lambda_{k+1}+\gamma+2\lambda_j-\tau_{k+1,j}}[\gamma-1]\varphi_{\lambda+\alpha_{k+1}^j}\\
&(k+2\le j\le n),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{i,j})\varphi_\lambda =&q^{2\lambda_i-2\lambda_j+\tau_{i,j}+2}[\lambda_j]\varphi_{\lambda+\alpha_j^i}\\
&(k+2\le i<j\le n),\\
\pi_\lambda(\hat{E}_{j,i})\varphi_\lambda =&q^{-2\lambda_i+2\lambda_j-\tau_{i,j}+2}[\lambda_i]\varphi_{\lambda+\alpha_i^j}\\
&(k+2\le i<j\le n),
\end{aligned}$$

ただし、

$$\tau_{i,j} = \begin{cases} -\lambda_{i+1} - \cdots - \lambda_{j-1} & (j-i>1) \\ 0 & (j-i=1) \end{cases}$$

また $[n]=(q^n-q^{-n})/(q-q^{-1})$ とする。

上の Proposition から、$k\times n$ 型 q- 超幾何関数 φ_λ は量子群 U_q との対称性を持つ。

Remark 4.2. 上の Proposition 4.1. からも、前章の Theorem 3.1. を確かめることができる。例えば、$k+2\le i<j\le n$ のとき、

$$\begin{aligned}\pi_\lambda(\hat{E}_{j,i}\hat{E}_{i,j})\varphi_\lambda &= q^{2\lambda_i-2\lambda_j+\tau_{i,j}+2}[\lambda_j]\pi_{\lambda+\alpha_j^i}(\hat{E}_{j,i})\varphi_{\lambda+\alpha_j^i} \\ &= [\lambda_i+1][\lambda_j]\varphi_\lambda\end{aligned}$$

最後に、先の q- 差分方程式系の解空間の次元はまだわかっていないが、$\hat{C}_{ij}$ の他にも (1.3) の q-analogue と呼べる量子群の action がわかっている。

[1] E. Horikawa, *Contiguity relations for q-hypergeometric function and related quantum group,* Proc.Japan Acad. 68(1992), 157-160.

[2] M. Noumi, *Quantum Grassmannians and q-hypergeometric series,* Centrum voor Wiskunde en Informatica Quarterly 5-4(1992), 293-307.

[3] M.Nakatani, *A Quantum Analogue of The Hypergeometric System* $E_{3,6}$, Kyushu Journal of Mathematics 49(1995), 67-91.

[4] M.Noumi, M.Nakatani, *q-Hypergeometric series associated with Quantum Grassmannians,* preprint(1995).